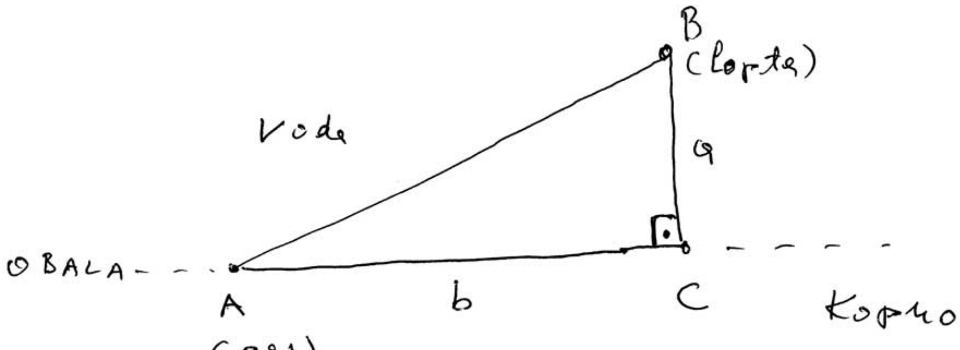
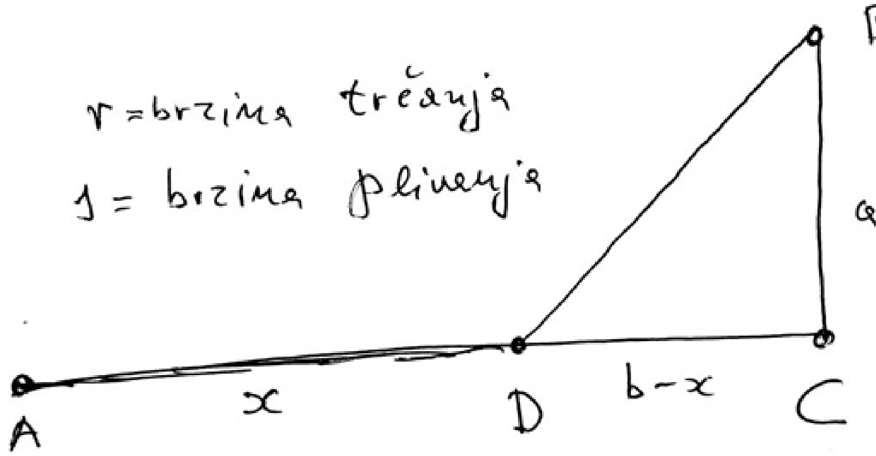
Znaju li psi diferencijalni račun ?

Uvod. Zamislimo da je, kao na slici 1, pas na obali jezera u točki A, lopta u jezeru u točki B, da je obala ravna crta i da je točka C na obali takva da je trokut ABC pravokutan s pravim kutom u vrhu C (tako da je točka C takva točka obale koja je najbliža točki B).



Sl. 1.

Kad pas opazi loptu onda pojuri prema njoj. Moguće je više scenarija. Na primjer, pas može skočiti odmah u vodu i plivati prema točki B (opravdanje za ovakav postupak jest da je to najkraći put do lopte). Sasvim je drugi scenarij ako pas trči po obali do točke C (duljina b), potom okomito na obalu prema lopti (duljina a). Opravdanje za ovakav postupak jest što će tako najmanje plivati. Predpostavimo da je brzina r trčanja veća od brzine s plivanja (što u pravilu i jest slučaj). U praksi se pokazuje da pas obično ne primjenjuje ni jedan od gornjih scenarija već da jedno vrijeme trči obalom prema točki C, ali samo do točke D (udaljenost x), potom skrene u vodu i pliva prema lopti (slika 2.).



Sl. 2.

Profesor Pennings je primijetio da se tako ponaša i njegov pas Elvis (vidi [1]). Da bi protumačio Elvisovu logiku napravio je niz pokusa i to opisao u članku. Podatci su pokazali da se, približno, Elvis ponaša tako da minimizira vrijeme potrebno da dodje do lopte. Ako zanemarimo mnoštvo faktora koji utječu na odabir strategije (na primjer, strah od vode), i predpostavimo da smo u idealnim uvjetima, onda dobijemo:
vrijeme trčanja od A do D=$\frac{x}{r}$,
vrijeme plivanja od D do B=$\frac{\sqrt{(b-x)^2+a^2}}{s}$,
pa treba naći minimum funkcije

$$f(x) := \frac{x}{r} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+a^2}}{s} \tag{1}$$

za $0 \le x \le b$. Deriviranjem se dobije:

$$\frac{df(x)}{dx} := \frac{1}{r} - \frac{b-x}{s\sqrt{(b-x)^2+a^2}}. \tag{2}$$

Rješenje jednadžbe $\frac{df(x)}{dx} = 0$ (što je uvjet lokalnog ekstrema), dobijemo

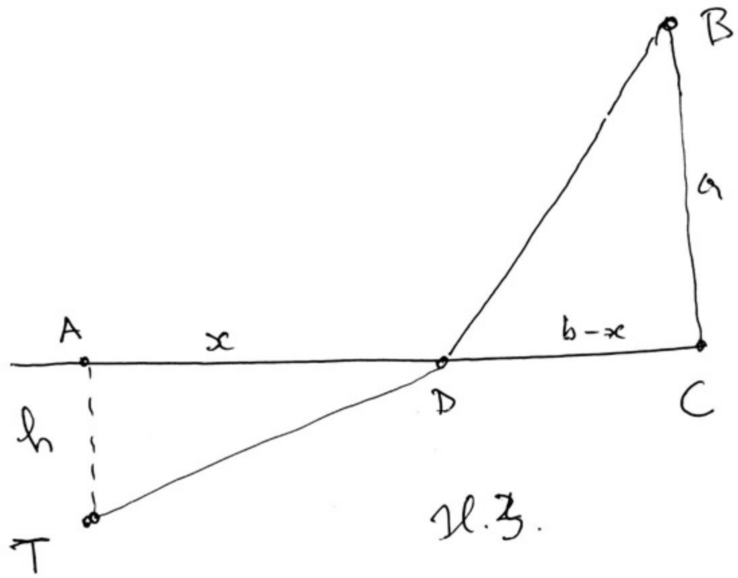
$$x = b - \frac{a}{\sqrt{(\frac{r}{s})^2 - 1}} \tag{3}$$

(dok se drugo rješenje odbacuje jer je veće od b). U članku se (uz nešto drukčije oznake) zaključuje da je za taj x vrijeme minimalno.
Ovo općenito nije točno, već samo uz uvjet da je brzina trčanja dovoljno velika (a toće ovisiti i o a, b) u usporedbi s brzinom plivanja (a ne samo veća od nje). Treba obrazložiti, grafički i računski, da je taj kritični odnos brzina

$$r \geq \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \cdot s, \tag{4}$$

tj. da jće za $s \leq r \leq \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \cdot s$ minimum vremena biti za $x = 0$, tj. da će tada, u idealnim uvjetima, Elvis uvijek odmah zaplivati prema lopti.
Takodjer, treba statistički procijeniti vezu izmedju a i $b - x$ iz podataka koje je naveo Pennings, tj. primijeniti linearnu regresiju na podatke. Eventualno, treba simulirati (idealno) Elvisovo ponašanje za razne vrijednosti brzina r, s i duljina a, b.

Poopćenja i interpretacije. U drugim člancima (na primjer [2]), problem je gledan općenitije i povezivan s problemom indeksa loma. Na slici 3. točka A nije nužno na obali već u T koja je na udaljenosti $h \geq 0$ od obale.



Sl. 3.

Sad se vidi da treba odrediti minimum funkcije

$$g(x) := \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{r} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + a^2}}{s}. \tag{5}$$

Vrijedi:

$$\frac{dfg(x)}{dx} := \frac{x}{r\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{b-x}{s\sqrt{(b-x)^2+a^2}}. \tag{6}$$

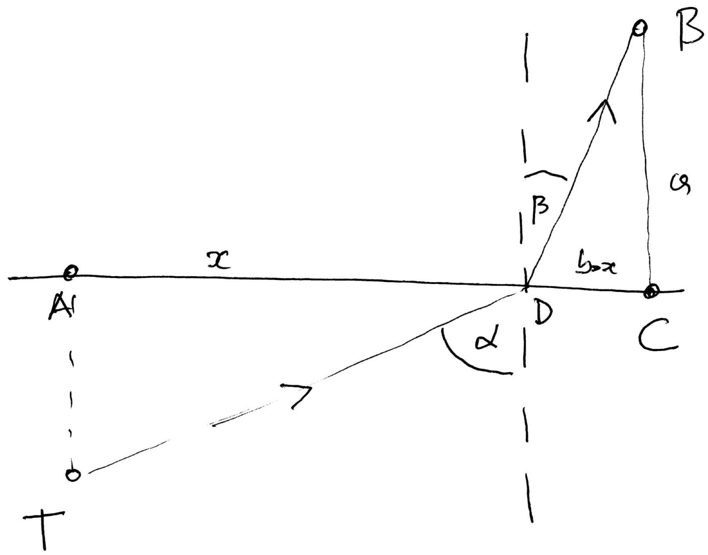
koja uvijek (obrazložiti to) ima jedinstvenu nultočku x na intervalu $<0, b>$, a koja zadovoljava omjer

$$r : s = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} : \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+a^2}}. \tag{7}$$

To je upravo formula za indeks loma zrake svjetlosti koja brzinom r ide jednim sredstvom iz T, a u točki D nastavi drugim sredstvom brzinom s prema točki B. Taj je omjer;

$$r : s = \sin\alpha : \sin\beta \tag{8}$$

(vidi sl. 4).



Sl. 4.

Tako ispada da su ova dva problema ekvivalentna (kako se obično tvrdi). Ipak, oni su ekvivalentni samo za $h > 0$, dok pri $h = 0$ prelaze u različite probleme (obrazložiti). Takodjer, za $h > 0$ svaki od ovih dvaju problema ima smisla za bilo koji odnos brzina r, s a ne samo za $r > s$ (komentirati). Konačno, treba iz (7) napisati jednadžbu četvrtog stupnja po x, i za konkretne vrijednosti a, b, h, r, s pokazati kako se numerički dobijva jedinstveno rješenje na intervalu $< 0, b >$).

Literatura:

[1] Timothy J. Pennings, Do Dogs Know Calculus, The College Mathematics Journal, vol. 30, no 3, May 2003, (178-182)

[2] Michael Bolt, Daniel C. Isaksen, Dogs Don't need calculus, The College Mathematics Journal, Volume 41, Number 1, January 2010 , (10-16).